6. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $x = u\cos\frac{v}{u}, \quad y = u\sin\frac{v}{u}, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 0, 1, 0]$
Použijeme větu 23 o dvou implicitních funkcích. Zaveďme funkce

$$F_1(x,y,u,v) = x - u\cos\frac{v}{u}, F_2(x,y,u,v) = y - u\sin\frac{v}{u}.$$

Funkce F_1, F_2 mají zřejmě spojité parciální derivace na okolí bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$. Navíc platí, že $F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 = F_2(x_0, y_0, u_0, v_0)$. Spočtěme nyní parciální derivace podle u a v a ověřme poslední předpoklad věty 23.

$$\begin{aligned}
(F_1)'_u(x,y,u,v) &= -\cos\frac{v}{u} + u\sin\frac{v}{u}\cdot\frac{-v}{u^2} = -\cos\frac{v}{u} - \frac{v}{u}\sin\frac{v}{u}\\
(F_1)'_v(x,y,u,v) &= \sin\frac{v}{u}\\
(F_2)'_u(x,y,u,v) &= -\sin\frac{v}{u} - u\cdot\frac{-v}{u^2}\cos\frac{v}{u} = \frac{v}{u}\cos\frac{v}{u} - \sin\frac{v}{u}\\
(F_2)'_v(x,y,u,v) &= -\cos\frac{v}{u}
\end{aligned}$$

Nyní spočtěme hodnotu determinantu matice parciálních derivací.

$$\begin{aligned}
&(F_1)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0)\cdot(F_2)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0) - (F_1)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0)\cdot(F_2)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0) =\\
&= (-1)\cdot(-1) - (0)\cdot(0) = 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Podle věty 23 tedy soustava určuje implicitní funkce $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$.

Navíc platí, že $F_1(x,y,\varphi(x,y),\psi(x,y)) = 0 = F_2(x,y,\varphi(x,y),\psi(x,y))$(ze znění věty). Platí tedy následující rovnosti.

$$F_1(x,y,\varphi(x,y),\psi(x,y)) = x - \varphi(x,y)\cdot\cos\frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)} = 0 \tag{1}$$

$$F_2(x,y,\varphi(x,y),\psi(x,y)) = y - \varphi(x,y)\cdot\sin\frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)} = 0 \tag{2}$$

K vypočtení φ'_x, ψ'_x zderivujeme rovnosti 1, 2 podle x. Všimněme si, že pravá strana je 0, tedy se nám zderivuje na 0. Dostaneme následující soustavu.

$$\begin{aligned}
1 - \varphi'_x(x,y)\cdot\cos\frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)} - \varphi(x,y)\cdot\sin\frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)}\cdot\frac{\psi'_x(x,y)\cdot\varphi(x,y) - \psi(x,y)\cdot\varphi'_x(x,y)}{\varphi(x,y)^2} &= 0\\
-\varphi'_x(x,y)\cdot\sin\frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)} + \varphi(x,y)\cdot\cos\frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)}\cdot\frac{\psi'_x(x,y)\cdot\varphi(x,y) - \psi(x,y)\cdot\varphi'_x(x,y)}{\varphi(x,y)^2} &= 0
\end{aligned}$$

Dostali jsme tak vztahy pro φ'_x, ψ'_x. Jelikož nás zajímají derivace jen v bodě $[x_0, y_0]$, dosadíme do předchozí rovnice tento bod a až pak soustavu vyřešíme, abychom spočetli hodnoty derivací. Dosazením bodu $[x_0, y_0]$ dostáváme následující soustavu.

$$\begin{aligned}
&1 - \varphi'_x(x_0,y_0) = 0\\
&1\cdot 1\cdot\frac{\psi'_x(x_0,y_0)\cdot 1 - 0}{1^2} = \psi'_x(x_0,y_0) = 0
\end{aligned}$$

Dostáváme, že $\varphi'_x(x_0, y_0) = 1, \psi'_x(x_0, y_0) = 0$.
Stejným způsobem spočteme derivace podle y. Zderivováním rovnic 1, 2 podle y dostaneme:

$$
\begin{aligned}
-\varphi'_y(x,y)\cdot\cos\frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)} - \varphi(x,y)\cdot\sin\frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)}\cdot\frac{\psi'_y(x,y)\cdot\varphi(x,y)-\psi(x,y)\cdot\varphi'_y(x,y)}{\varphi(x,y)^2} &= 0\\
1-\varphi'_y(x,y)\cdot\sin\frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)} + \varphi(x,y)\cdot\cos\frac{\psi(x,y)}{\varphi(x,y)}\cdot\frac{\psi'_y(x,y)\cdot\varphi(x,y)-\psi(x,y)\cdot\varphi'_y(x,y)}{\varphi(x,y)^2} &= 0
\end{aligned}
$$

Dosazením bodu $[x_0, y_0]$ dostaneme:

$$
\begin{aligned}
-\varphi'_y(x_0,y_0) &= 0\\
1-\psi'_x(x_0,y_0) &= 0
\end{aligned}
$$

Platí tedy, že $\varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \psi'_y(x_0, y_0) = 1$

Parciální derivace těchto funkcí lze spočítat též dosazením do vzorců, které jsou odvozeny v teorii k 6. cvičení. Začněmě tedy nejdříve dopočítáním zbylých parciálních derivací funkcí F_1, F_2.

$$
\begin{aligned}
(F_1)'_x(x,y,u,v) &= 1\\
(F_1)'_y(x,y,u,v) &= 0\\
(F_2)'_x(x,y,u,v) &= 0\\
(F_2)'_y(x,y,u,v) &= 1
\end{aligned}
$$

Jelikož, $\varphi(x_0, y_0) = u_0$ a $\psi(x_0, y_0) = v_0$, tak platí následující.

$$
\begin{aligned}
(F_1)'_x(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 1\\
(F_1)'_y(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 0\\
(F_1)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0) &= -1\\
(F_1)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 0\\
(F_2)'_x(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 0\\
(F_2)'_y(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 1\\
(F_2)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 0\\
(F_2)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0) &= -1
\end{aligned}
$$

Nyní dosadíme do vzorců a dopočteme parciální derivace φ, ψ.

$$\psi'_x(x_0,y_0) = \frac{(F_2)'_x(x_0,y_0)\,(F_1)'_u(x_0,y_0) - (F_1)'_x(x_0,y_0)\,(F_2)'_u(x_0,y_0)}{(F_1)'_v(x_0,y_0)\,(F_2)'_u(x_0,y_0) - (F_2)'_v(x_0,y_0)\,(F_1)'_u(x_0,y_0)} = \frac{-0-1\cdot 0}{0-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$\varphi'_x(x_0,y_0) = \frac{-(F_1)'_v(x_0,y_0)\psi'_x(x_0,y_0) - (F_1)'_x(x_0,y_0)}{(F_1)'_u(x_0,y_0)} = \frac{0-1}{-1} = 1$$

$$\psi'_y(x_0,y_0) = \frac{(F_2)'_y(x_0,y_0)\,(F_1)'_u(x_0,y_0) - (F_1)'_y(x_0,y_0)\,(F_2)'_u(x_0,y_0)}{(F_1)'_v(x_0,y_0)\,(F_2)'_u(x_0,y_0) - (F_2)'_v(x_0,y_0)\,(F_1)'_u(x_0,y_0)} = \frac{-1-0}{0-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\varphi'_y(x_0,y_0) = \frac{-(F_1)'_v(x_0,y_0)\psi'_y(x_0,y_0) - (F_1)'_y(x_0,y_0)}{(F_1)'_u(x_0,y_0)} = \frac{-0\cdot 1-0}{-1} = 0$$

Příklad 1 (b) $xe^{u+v} + 2uv = 1, \quad ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x, \quad [x_0, y_0, u_0, v_0] = [1, 2, 0, 0]$
Použijeme větu 23 o dvou implicitních funkcích. Zaveďme funkce

$$F_1(x,y,u,v) = xe^{u+v} + 2uv - 1, F_2(x,y,u,v) = ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x.$$

Funkce F_1, F_2 mají zřejmě spojité parciální derivace na okolí bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$. Navíc platí, že $F_1(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 = F_2(x_0, y_0, u_0, v_0)$.

Spočtěme nyní parciální derivace funkcí F_1, F_2.

$$\begin{aligned}
(F_1)'_x(x,y,u,v) &= e^{u+v}\\
(F_1)'_y(x,y,u,v) &= 0\\
(F_1)'_u(x,y,u,v) &= xe^{u+v} + 2v\\
(F_1)'_v(x,y,u,v) &= xe^{u+v} + 2u\\
(F_2)'_x(x,y,u,v) &= -2\\
(F_2)'_y(x,y,u,v) &= e^{u-v}\\
(F_2)'_u(x,y,u,v) &= ye^{u-v} - \frac{1}{1+v}\\
(F_2)'_v(x,y,u,v) &= -ye^{u-v} + \frac{u}{(1+v)^2}
\end{aligned}$$

Nyní spočtěme hodnotu determinantu matice parciálních derivací.

$$\begin{aligned}
&(F_1)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0)\cdot(F_2)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0) - (F_1)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0)\cdot(F_2)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0) =\\
&= 1\cdot(-2) - 1\cdot 1 = -3 \neq 0
\end{aligned}$$

Podle věty 23 tedy soustava určuje implicitní funkce $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$.

Parciální derivace spočteme stejně jako v příkladu 1 (a). Tj. zderivujeme rovnosti $F_1(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y) = 0, F_2(x, y, \varphi(x, y), \psi(x, y)) = 0$, do získané soustavy dosadíme bod $[x_0, y_0]$ a soustavu vyřešíme.

$$\begin{aligned}
F_1(x,y,\varphi(x,y),\psi(x,y) &= xe^{\varphi(x,y)+\psi(x,y)} + 2\varphi(x,y)\psi(x,y) - 1 = 0\\
F_2(x,y,\varphi(x,y),\psi(x,y) &= ye^{\varphi(x,y)-\psi(x,y)} - \frac{\varphi(x,y)}{1+\psi(x,y)} - 2x = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \implies e^{\varphi(x,y)+\psi(x,y)} + xe^{\varphi(x,y)+\psi(x,y)}\left(\varphi'_x(x,y) + \psi'_x(x,y)\right) + 2\varphi'_x(x,y)\psi(x,y) + 2\varphi(x,y)\psi'_x(x,y) = 0$$
$$ye^{\varphi(x,y)-\psi(x,y)}\left(\varphi'_x(x,y) - \psi'_x(x,y)\right) - \frac{\varphi'_x(x,y)\cdot(1+\psi(x,y)) - \varphi(x,y)\cdot\psi'_x(x,y)}{(1+\psi(x,y))^2} - 2 = 0$$

$$[x_0,y_0] \implies e^0 + 1\cdot e^0\left(\varphi'_x(x_0,y_0) + \psi'_x(x_0,y_0)\right) = 0$$
$$2e^0\left(\varphi'_x(x_0,y_0) - \psi'_x(x_0,y_0)\right) - \frac{\varphi'_x(x_0,y_0)}{1} - 2 = 0$$

$$1 + \varphi'_x(x_0,y_0) + \psi'_x(x_0,y_0) = 0$$
$$\varphi'_x(x_0,y_0) - 2\psi'_x(x_0,y_0) - 2 = 0$$

Dostáváme: $\varphi'_x(x_0,y_0) = 0, \psi'_x(x_0,y_0) = -1$

$$\frac{\partial}{\partial y} \implies xe^{\varphi(x,y)+\psi(x,y)}\left(\varphi'_y(x,y) + \psi'_y(x,y)\right) + 2\varphi'_y(x,y)\psi(x,y) + 2\varphi(x,y)\psi'_y(x,y) = 0$$
$$e^{\varphi(x,y)-\psi(x,y)} + ye^{\varphi(x,y)-\psi(x,y)}\left(\varphi'_y(x,y) - \psi'_y(x,y)\right) - \frac{\varphi'_y(x,y)\cdot(1+\psi(x,y)) - \varphi(x,y)\cdot\psi'_y(x,y)}{(1+\psi(x,y))^2} = 0$$

$$[x_0,y_0] \implies 1\cdot e^0\left(\varphi'_y(x_0,y_0) + \psi'_y(x_0,y_0)\right) = 0$$
$$e^0 + 2e^0\left(\varphi'_y(x_0,y_0) - \psi'_y(x_0,y_0)\right) - \frac{\varphi'_y(x_0,y_0)}{1} = 0$$

$$\varphi'_y(x_0,y_0) + \psi'_y(x_0,y_0) = 0$$
$$1 + \varphi'_y(x_0,y_0) - 2\psi'_y(x_0,y_0) = 0$$

Dostáváme: $\varphi'_y(x_0,y_0) = -\frac{1}{3}, \psi'_y(x_0,y_0) = \frac{1}{3}$

Parciální derivace těchto funkcí lze spočítat též dosazením do vzorců, které jsou odvozeny v teorii k 6. cvičení.

Platí následující, neb $\varphi(x_0,y_0) = u_0, \psi(x_0,y_0) = v_0$.

$$(F_1)'_x(x_0,y_0,u_0,v_0) = 1$$
$$(F_1)'_y(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0$$
$$(F_1)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0) = 1$$
$$(F_1)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0) = 1$$
$$(F_2)'_x(x_0,y_0,u_0,v_0) = -2$$
$$(F_2)'_y(x_0,y_0,u_0,v_0) = 1$$
$$(F_2)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0) = 1$$
$$(F_2)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0) = -2$$

$$\psi_x'(x_0,y_0) = \frac{(F_2)_x'(x_0,y_0)\,(F_1)_u'(x_0,y_0) - (F_1)_x'(x_0,y_0)\,(F_2)_u'(x_0,y_0)}{(F_1)_v'(x_0,y_0)\,(F_2)_u'(x_0,y_0) - (F_2)_v'(x_0,y_0)\,(F_1)_u'(x_0,y_0)} = \frac{-2\cdot 1 - 1\cdot 1}{3} = -1$$
$$\varphi_x'(x_0,y_0) = \frac{-(F_1)_v'(x_0,y_0)\psi_x'(x_0,y_0) - (F_1)_x'(x_0,y_0)}{(F_1)_u'(x_0,y_0)} = \frac{-1\cdot(-1)-1}{1} = 0$$
$$\psi_y'(x_0,y_0) = \frac{(F_2)_y'(x_0,y_0)\,(F_1)_u'(x_0,y_0) - (F_1)_y'(x_0,y_0)\,(F_2)_u'(x_0,y_0)}{(F_1)_v'(x_0,y_0)\,(F_2)_u'(x_0,y_0) - (F_2)_v'(x_0,y_0)\,(F_1)_u'(x_0,y_0)} = \frac{1\cdot 1 - 0\cdot 1}{3} = \frac{1}{3}$$
$$\varphi_y'(x_0,y_0) = \frac{-(F_1)_v'(x_0,y_0)\psi_y'(x_0,y_0) - (F_1)_y'(x_0,y_0)}{(F_1)_u'(x_0,y_0)} = \frac{-1\cdot\frac{1}{3} - 0}{1} = \frac{-1}{3}$$

Příklad 1 (c) $x = e^u + u\sin v, \quad y = e^u - u\cos v, \quad [x_0,y_0,u_0,v_0] = [1+e, e, 1, \frac{\pi}{2}]$
Použijeme větu 23 o dvou implicitních funkcích. Zaveďme funkce

$$F_1(x,y,u,v) = x - e^u - u\sin v, F_2(x,y,u,v) = y - e^u + u\cos v.$$

Funkce F_1, F_2 mají zřejmě spojité parciální derivace na okolí bodu $[x_0,y_0,u_0,v_0]$. Navíc platí, že $F_1(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0 = F_2(x_0,y_0,u_0,v_0)$.

Spočtěme nyní parciální derivace funkcí F_1, F_2.

$$\begin{aligned}
(F_1)_x'(x,y,u,v) &= 1\\
(F_1)_y'(x,y,u,v) &= 0\\
(F_1)_u'(x,y,u,v) &= -e^u - \sin v\\
(F_1)_v'(x,y,u,v) &= -u\cos v\\
(F_2)_x'(x,y,u,v) &= 0\\
(F_2)_y'(x,y,u,v) &= 1\\
(F_2)_u'(x,y,u,v) &= -e^u + \cos v\\
(F_2)_v'(x,y,u,v) &= -u\sin v
\end{aligned}$$

Dále platí následující, neb $\varphi(x_0,y_0) = u_0, \psi(x_0,y_0) = v_0$.

$$\begin{aligned}
(F_1)_x'(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 1\\
(F_1)_y'(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 0\\
(F_1)_u'(x_0,y_0,u_0,v_0) &= -e - 1\\
(F_1)_v'(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 0\\
(F_2)_x'(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 0\\
(F_2)_y'(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 1\\
(F_2)_u'(x_0,y_0,u_0,v_0) &= -e\\
(F_2)_v'(x_0,y_0,u_0,v_0) &= -1
\end{aligned}$$

Nyní spočtěme hodnotu determinantu matice parciálních derivací.

$$(F_1)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0)\cdot(F_2)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0)-(F_1)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0)\cdot(F_2)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0)=$$
$$=(-e-1)\cdot(-1)-0\cdot(-e)=e+1\neq 0$$

Podle věty 23 tedy soustava určuje implicitní funkce $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$.

Parciální derivace těchto funkcí lze spočítat též dosazením do vzorců, které jsou odvozeny v teorii k 6. cvičení.

$$\psi'_x(x_0,y_0)=\frac{(F_2)'_x(x_0,y_0)\,(F_1)'_u(x_0,y_0)-(F_1)'_x(x_0,y_0)\,(F_2)'_u(x_0,y_0)}{(F_1)'_v(x_0,y_0)\,(F_2)'_u(x_0,y_0)-(F_2)'_v(x_0,y_0)\,(F_1)'_u(x_0,y_0)}=\frac{0-1\cdot(-e)}{-e-1}=\frac{-e}{e+1}$$
$$\varphi'_x(x_0,y_0)=\frac{-(F_1)'_v(x_0,y_0)\psi'_x(x_0,y_0)-(F_1)'_x(x_0,y_0)}{(F_1)'_u(x_0,y_0)}=\frac{-0-1}{-e-1}=\frac{1}{e+1}$$
$$\psi'_y(x_0,y_0)=\frac{(F_2)'_y(x_0,y_0)\,(F_1)'_u(x_0,y_0)-(F_1)'_y(x_0,y_0)\,(F_2)'_u(x_0,y_0)}{(F_1)'_v(x_0,y_0)\,(F_2)'_u(x_0,y_0)-(F_2)'_v(x_0,y_0)\,(F_1)'_u(x_0,y_0)}=\frac{-e-1-0}{-e-1}=1$$
$$\varphi'_y(x_0,y_0)=\frac{-(F_1)'_v(x_0,y_0)\psi'_y(x_0,y_0)-(F_1)'_y(x_0,y_0)}{(F_1)'_u(x_0,y_0)}=\frac{0-0}{e+1}=0$$

Příklad 1 (d) $5xu+3yv=4x^2yv+4u^2v, \quad 4xyu^3+xv^2=5yuv, \quad [x_0,y_0,u_0,v_0]=[1,1,1,1]$
Použijeme větu 23 o dvou implicitních funkcích. Zaveďme funkce

$$F_1(x,y,u,v)=5xu+3yv-4x^2yv-4u^2v, F_2(x,y,u,v)=4xyu^3+xv^2-5yuv.$$

Funkce F_1, F_2 mají zřejmě spojité parciální derivace na okolí bodu $[x_0,y_0,u_0,v_0]$. Navíc platí, že $F_1(x_0,y_0,u_0,v_0)=0=F_2(x_0,y_0,u_0,v_0)$.

Spočtěme nyní parciální derivace funkcí F_1, F_2.

$$\begin{aligned}
(F_1)'_x(x,y,u,v)&=5u-8xyv\\
(F_1)'_y(x,y,u,v)&=3v-4x^2v\\
(F_1)'_u(x,y,u,v)&=5x-8uv\\
(F_1)'_v(x,y,u,v)&=3y-4x^2y-4u^2\\
(F_2)'_x(x,y,u,v)&=4yu^3+v^2\\
(F_2)'_y(x,y,u,v)&=4xu^3-5uv\\
(F_2)'_u(x,y,u,v)&=12xyu^2-5yv\\
(F_2)'_v(x,y,u,v)&=2xv-5yu
\end{aligned}$$

Dále platí následující, neb $\varphi(x_0,y_0)=u_0, \psi(x_0,y_0)=v_0$.

$$
\begin{aligned}
(F_1)'_x(x_0,y_0,u_0,v_0) &= -3\\
(F_1)'_y(x_0,y_0,u_0,v_0) &= -1\\
(F_1)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0) &= -3\\
(F_1)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0) &= -5\\
(F_2)'_x(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 5\\
(F_2)'_y(x_0,y_0,u_0,v_0) &= -1\\
(F_2)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0) &= 7\\
(F_2)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0) &= -3
\end{aligned}
$$

Nyní spočtěme hodnotu determinantu matice parciálních derivací.

$$
\begin{aligned}
&(F_1)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0)\cdot(F_2)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0)-(F_1)'_v(x_0,y_0,u_0,v_0)\cdot(F_2)'_u(x_0,y_0,u_0,v_0)=\\
&=-3\cdot(-3)-(-5)\cdot 7=9+35=44\neq 0
\end{aligned}
$$

Podle věty 23 tedy soustava určuje implicitní funkce $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$.

Parciální derivace těchto funkcí lze spočítat též dosazením do vzorců, které jsou odvozeny v teorii k 6. cvičení.

$$
\begin{aligned}
\psi'_x(x_0,y_0) &= \frac{(F_2)'_x(x_0,y_0)\,(F_1)'_u(x_0,y_0)-(F_1)'_x(x_0,y_0)\,(F_2)'_u(x_0,y_0)}{(F_1)'_v(x_0,y_0)\,(F_2)'_u(x_0,y_0)-(F_2)'_v(x_0,y_0)\,(F_1)'_u(x_0,y_0)}=\frac{-15+3\cdot 7}{-44}=\frac{-3}{22}\\
\varphi'_x(x_0,y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0,y_0)\psi'_x(x_0,y_0)-(F_1)'_x(x_0,y_0)}{(F_1)'_u(x_0,y_0)}=\frac{5\cdot\frac{-3}{22}+3}{-3}=\frac{-15+3\cdot 22}{-3\cdot 22}=\frac{-51}{66}\\
\psi'_y(x_0,y_0) &= \frac{(F_2)'_y(x_0,y_0)\,(F_1)'_u(x_0,y_0)-(F_1)'_y(x_0,y_0)\,(F_2)'_u(x_0,y_0)}{(F_1)'_v(x_0,y_0)\,(F_2)'_u(x_0,y_0)-(F_2)'_v(x_0,y_0)\,(F_1)'_u(x_0,y_0)}=\frac{3+7}{-44}=\frac{-5}{22}\\
\varphi'_y(x_0,y_0) &= \frac{-(F_1)'_v(x_0,y_0)\psi'_y(x_0,y_0)-(F_1)'_y(x_0,y_0)}{(F_1)'_u(x_0,y_0)}=\frac{\frac{-25}{22}+1}{-3}=\frac{-25+22}{-3\cdot 22}=\frac{1}{22}
\end{aligned}
$$

Příklad 2 (a) $\arccos(\log x+\log y)=3\arcsin\frac{x+y}{4}, [x_0,y_0]=[1,1]$
Implicitní funkce: Rovnici anulujme a zaveďme funkci $F(x,y)=\arccos\left(\log x+\log y\right)-3\arcsin\frac{x+y}{4}$. Ověřme předpoklady věty 22.

$$
\begin{aligned}
F'_x(x,y) &= \frac{-1}{x\sqrt{1-(\log x+\log y)^2}}-\frac{3}{4\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{4}\right)^2}}\\
F'_y(x,y) &= \frac{-1}{y\sqrt{1-(\log x+\log y)^2}}-\frac{3}{4\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{4}\right)^2}}
\end{aligned}
$$

Chceme, aby $x=\varphi(y)$, proto podmínka *(iii)* z věty 22 je: $F'_x(x,y)\neq 0$ (záměna proměnných).

Zřejmě $F \in C^1(G)$, kde je G dostatečně malé ot. okolí bodu $[x_0, y_0], F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_x(x_0, y_0) = \frac{-1}{1\sqrt{1-0^2}} - \frac{3}{4\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = -1 - \frac{3}{4\sqrt{\frac{3}{4}}} = -1 - \sqrt{\frac{3}{4}} \neq 0$.

Dle věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(y_0) = x_0$.

První derivace φ: Podle věty 22 spočteme $\varphi'(y_0)$.

$$\varphi'(y_0) = -\frac{F'_y(\varphi(y_0), y_0)}{F'_x(\varphi(y_0), y_0)} = -\frac{-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}}{-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}} = -1$$

Druhá derivace φ: Spočteme druhé parciální derivace funkce F a dosadíme do předpisu odvozeného v teorii k 5. cvičení.

Zadefinujme pro usnadnění výpočtu funkce: $g(x, y) := \frac{-1}{x\sqrt{1-(\log x+\log y)^2}}, h(x, y) := -\frac{3}{4\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{4}\right)^2}}$. Pak $F'_x(x, y) = g(x, y) + h(x, y), F'_y(x, y) = g(y, x) + h(x, y)$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1 - (\log x + \log y)^2 + x \cdot \left(-2(\log x + \log y) \cdot \frac{1}{x}\right)}{x^2 \cdot \left(1 - (\log x + \log y)^2\right)}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{1 - (0+0)^2 + 1 \cdot \left(-2(0+0) \cdot \frac{1}{1}\right)}{1^2 \cdot \left(1 - (0+0)^2\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{-1}{2\sqrt{\left(1 - \left(\frac{x+y}{4}\right)^2\right)^3}} \cdot \frac{-x-y}{8}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{3}{64} \cdot \frac{1+1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{1+1}{4}\right)^2\right)^3}} = -\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$F''_{x,x}(x_0, y_0) = g'_x(x_0, y_0) + h'_x(x_0, y_0) = 1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$F''_{x,y}(x_0, y_0) \overset{21}{=} F''_{y,x}(x_0, y_0) = g'_y(x_0, y_0) + h'_y(x_0, y_0) = 1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$F''_{y,y}(\varphi(y_0), y_0) = g'_y(y, x) + h'_y(x, y) = 1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}$$

$$F''_{x,x}(x_0, y_0) + F''_{x,y}(x_0, y_0) \cdot \varphi'(y_0) = \left(1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}\right) + \left(1 - \frac{1}{4\sqrt{3}}\right) \cdot (-1) = 0$$

$$F''_{y,x}(x_0, y_0) + F''_{y,y}(x_0, y_0) \cdot \varphi'(y_0) = 0$$

Nyní dosadíme do předpisu pro φ'', který je odvozen v teorii k 5. cvičení (z řetízkového přavidla). Uvědomme si však, že jelikož $x = \varphi(y)$, tak se nám prohodila role x y y, proto ve vzorci níže je např. ve jmenovateli $(F'_x)^2$ apod.

$$\varphi'' = -\frac{\left(F''_{y,x} + F''_{y,y} \cdot \varphi'\right) \cdot F'_x - F'_y \cdot \left(F''_{x,x} + F''_{x,y} \cdot \varphi'\right)}{\left(F'_x\right)^2} =$$
$$= -\frac{0 \cdot \left(-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right) - 0 \cdot \left(-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)}{\left(-1 - \sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} = 0$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$x = T(y) = \varphi(y_0) + \varphi'(y_0)\,(y - y_0) = 1 - 1(y - 1) = 1 - y + 1 = 2 - y$$

Příklad 2 (b) $\sin(\arctan x + \arctan(2y)) + \cos(\arctan x + \arctan(2y)) = 1, [x_0, y_0] = [-1, \frac{1}{2}]$

Implicitní funkce: Rovnici anulujme a zaveďme funkci $F(x, y) = \sin(\arctan x + \arctan(2y)) + \cos(\arctan x + \arctan(2y)) - 1$. Ověřme předpoklady věty 22.

$$F'_x(x, y) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot \left(\cos\left(\arctan x + \arctan(2y)\right) - \sin\left(\arctan x + \arctan(2y)\right)\right)$$
$$F'_y(x, y) = \frac{2}{1 + 4y^2} \cdot \left(\cos\left(\arctan x + \arctan(2y)\right) - \sin\left(\arctan x + \arctan(2y)\right)\right)$$

Chceme, aby $x = \varphi(y)$, proto podmínka *(iii)* z věty 22 je: $F'_x(x, y) \neq 0$ (záměna proměnných).

Zřejmě $F \in C^1(G)$, kde je G dostatečně malé ot. okolí bodu $[x_0, y_0], F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{1+(-1)^2} \left(\cos\left(\arctan(-1) + \arctan(1)\right) - \sin\left(\arctan(-1) + \arctan(1)\right)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin(0)\right) = \frac{1}{2} \neq 0$.

Dle věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(y_0) = x_0$.

První derivace φ: Podle věty 22 spočteme $\varphi'(y_0)$.

$$\varphi'(y_0) = -\frac{F'_y\left(\varphi(y_0), y_0\right)}{F'_x\left(\varphi(y_0), y_0\right)} = -\frac{\frac{2}{2}}{\frac{1}{2}} = -2$$

Druhá derivace φ: Předpis pro φ' zderivujeme podle x a dostaneme následující.

$$
\begin{aligned}
&\varphi'(y) = -\frac{F'_y\left(\varphi(y), y\right)}{F'_x\left(\varphi(y), y\right)}\\
&A(y) := \frac{2}{1+4y^2}\cdot\left(\cos\left(\arctan\left(\varphi(y)\right)+\arctan(2y)\right)-\sin\left(\arctan\left(\varphi(y)\right)+\arctan(2y)\right)\right)\\
&B(y) := \frac{1}{1+\varphi(y)^2}\cdot\left(\cos\left(\arctan\left(\varphi(y)\right)+\arctan(2y)\right)-\sin\left(\arctan\left(\varphi(y)\right)+\arctan(2y)\right)\right)\\
&\varphi''(y) = -\frac{A'(y)B(y)-A(y)B'(y)}{B^2(y)}\\
&A(y_0) = 1\\
&A'(y) = \frac{-2\cdot 8y}{\left(1+4y^2\right)^2}\cdot(\dots)+\frac{2}{1+4y^2}\cdot\left(\frac{\varphi'(y)}{1+\varphi(y)^2}+\frac{2}{1+4y^2}\right)\cdot(-\sin(\dots)-\cos(\dots))\\
&A'(y_0) = \frac{-16\cdot\frac{1}{2}}{(2)^2}\cdot 1+\frac{2}{2}\cdot\left(\frac{-1}{1+(-1)^2}+\frac{2}{1+1}\right)\cdot(-\sin(0)-\cos(0)) = -2-\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}\\
&B(y_0) = \frac{1}{2}\\
&B'(y) = \frac{-\varphi(y)\cdot\varphi'(y)}{\left(1+\varphi(y)^2\right)^2}\cdot(\dots)+\frac{1}{1+\varphi(y)^2}\cdot\left(\frac{\varphi'(y)}{1+\varphi(y)^2}+\frac{2}{1+4y^2}\right)\cdot(-\sin(\dots)-\cos(\dots))\\
&B'(y_0) = \frac{-(-1)\cdot(-2)}{4}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{1+(-1)^2}+\frac{2}{1+1}\right)\cdot(-\sin(0)-\cos(0)) = -\frac{1}{2}-\frac{1}{4} = \frac{-3}{4}\\
&\varphi''(y_0) = -\frac{-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}-1\cdot\frac{-3}{4}}{\frac{1}{4}} = -4\cdot\frac{-5+3}{4} = 2
\end{aligned}
$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$x = T(y) = \varphi(y_0)+\varphi'(y_0)\left(y-y_0\right) = -1-2\left(y-\frac{1}{2}\right) = -2y$$

Příklad 2 (c) $\arctan(x+\sin y)+\arctan(x+\cos y) = \frac{\pi}{4}, [x_0, y_0] = [1, \pi]$

Implicitní funkce: Rovnici anulujme a zaveďme funkci $F(x, y) = \arctan(x+\sin y)+\arctan(x+\cos y)-\frac{\pi}{4}$. Ověřme předpoklady věty 22.

$$
\begin{aligned}
F'_x(x, y) &= \frac{1}{1+(x+\sin y)^2}+\frac{1}{1+(x+\cos y)^2}\\
F'_y(x, y) &= \frac{\cos y}{1+(x+\sin y)^2}+\frac{-\sin y}{1+(x+\cos y)^2}
\end{aligned}
$$

Chceme, aby $x = \varphi(y)$, proto podmínka *(iii)* z věty 22 je: $F'_x(x, y) \neq 0$ (záměna proměnných).

Zřejmě $F \in C^1(G)$, kde je G dostatečně malé ot. okolí bodu $[x_0, y_0], F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_x(x_0, y_0) = \frac{1}{2}+\frac{1}{1+(1-1)^2} = \frac{1}{2}+1 = \frac{3}{2} \neq 0$.

Dle věty 22 zadaná rovnice určuje na okolí bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci φ a platí, že $\varphi(y_0) = x_0$.

První derivace φ: Podle věty 22 spočteme $\varphi'(y_0)$.

$$\varphi'(y_0) = -\frac{F'_y\left(\varphi(y_0), y_0\right)}{F'_x\left(\varphi(y_0), y_0\right)} = -\frac{\frac{-1}{2}+0}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Druhá derivace φ: Předpis pro φ' zderivujeme podle x a dostaneme následující.

$$\varphi'(y) = -\frac{F'_y(\varphi(y), y)}{F'_x(\varphi(y), y)}$$

$$A(y) := \frac{\cos y}{1 + (\varphi(y) + \sin y)^2} + \frac{-\sin y}{1 + (\varphi(y) + \cos y)^2}$$

$$B(y) := \frac{1}{1 + (\varphi(y) + \sin y)^2} + \frac{1}{1 + (\varphi(y) + \cos y)^2}$$

$$\varphi''(y) = -\frac{A'(y)B(y) - A(y)B'(y)}{B^2(y)}$$

$$A(y_0) = -\frac{1}{2}$$

$$A'(y) = \frac{-\sin y \cdot \left(1 + (\varphi(y) + \sin y)^2\right) - \cos y \cdot 2 \cdot (\varphi(y) + \sin y)(\varphi'(y) + \cos y)}{\left(1 + (\varphi(y) + \sin y)^2\right)^2} +$$

$$+ \frac{-\cos y \cdot \left(1 + (\varphi(y) + \cos y)^2\right) + \sin y \cdot 2(\varphi(y) + \cos y)(\varphi'(y) - \sin y)}{\left(1 + (\varphi(y) + \cos y)^2\right)^2}$$

$$A'(y_0) = \frac{0 - (-1) \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{3} + 1\right)}{4} + \frac{1 \cdot \left(1 + (1 - 1)^2\right) + 0}{1} = \frac{8}{3 \cdot 4} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

$$B(y_0) = \frac{3}{2}$$

$$B'(y) = \frac{-1 \cdot 2 \cdot (\varphi(y) + \sin y)(\varphi'(y) + \cos y)}{\left(1 + (\varphi(y) + \sin y)^2\right)^2} + \frac{-1 \cdot 2 \cdot (\varphi(y) + \cos y)(\varphi'(y) - \sin y)}{\left(1 + (\varphi(y) + \cos y)^2\right)^2}$$

$$B'(y_0) = \frac{-2 \cdot (1 + 0)\left(\frac{1}{3} - 1\right)}{4} + \frac{-2 \cdot 0}{1} = \frac{1}{3}$$

$$\varphi''(y_0) = -\frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{1}{6}}{\frac{9}{4}} = \frac{16}{6} \cdot \frac{4}{9}$$

Tečná nadrovina: Dosadíme do definice.

$$x = T(y) = \varphi(y_0) + \varphi'(y_0)(y - y_0) = 1 + \frac{1}{3} \cdot (y - \pi) = \frac{y}{3} + 1 - \frac{\pi}{3}$$